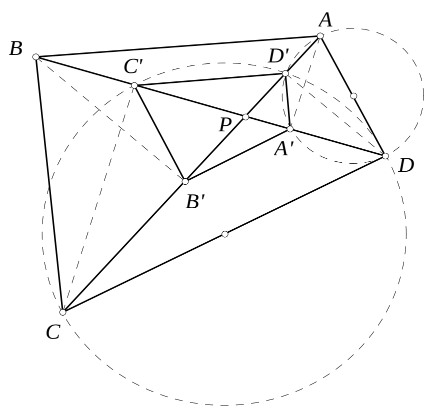
FASE LOCAL DE LA XLIV OME
SESIONES PRIMERA Y SEGUNDA
18 DE ENERO DE 2008 (MAÑANA Y TARDE)

1. Sea P una familia de puntos en el plano tales que por cada cuatro puntos de P pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de P están en la misma circunferencia? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN:
Sea $T = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ un subconjunto de P con cuatro elementos. Por hipótesis existe una circunferencia α que pasa por estos cuatro puntos. Supongamos que exista un punto $x \in P$, tal que $x \notin \alpha$. Por la condición del enunciado existe una circunferencia β que pasa por los puntos x, x_2, x_3 y x_4. Entonces las circunferencias α y β tienen tres puntos comunes, lo que implica que deben coincidir.
Por la condición del enunciado existe una circunferencia β que pasa por los puntos x, x_2, x_3 y x_4. Entonces las circunferencias α y β tienen tres puntos comunes, lo que implica que deben coincidir.

2. En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.

SOLUCIÓN:



Vamos a probar que ambos cuadriláteros tienen todos sus ángulos iguales.
Por construcción $ADA'D'$ es circunscriptible y de ahí que $\angle CD'A' = \angle ADA'$ por ser ambos suplementarios del mismo ángulo $\angle AD'A'$.
También el cuadrilátero $DCC'D'$ es circunscriptible y $\angle C'D'C = \angle C'DC$ por estar inscritos en el mismo arco. Sumando resulta $\angle ADC = \angle CD'A'$.
Análogamente se prueba para los restantes vértices.

3. Halla las soluciones reales de la ecuación: $x\left(\frac{6-x}{x+1}\right)\left(\frac{6-x}{x+1}+x\right)=8.$

SOLUCIÓN:
Sea $t=x+1.$ Entonces sustituyendo en la ecuación dada, se tiene $(t-1)\left(\frac{7}{t}-1\right)\left(\frac{7}{t}+t-2\right)=8,$ que equivale a $\left(7-t-\frac{7}{t}+1\right)\left(\frac{7}{t}+t-2\right)=8.$ Haciendo el cambio $u=\frac{7}{t}+t,$ se obtiene la ecuación $(8-u)(u-2)=8$ equivalente a $u^2-10u+24=0,$ cuyas soluciones son $u=4$ y $u=6.$
De $u=\frac{7}{t}+t=4,$ se obtiene $t^2-4t+7=0$ que no tiene soluciones reales y si $u=\frac{7}{t}+t=6,$ se llega a la ecuación $t^2-6t+7=0,$ cuyas dos soluciones son reales: $t_1=3+\sqrt{2}$ y $t_2=3-\sqrt{2}.$ Como $x=t-1,$ la ecuación inicial tiene las soluciones reales $x_1=2-\sqrt{2}$ y $x_2=2+\sqrt{2}.$

4. Demuestra que $2222^{5555}+5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

SOLUCIÓN:
Tenemos las siguientes congruencias módulo 7
$2222^0\equiv 1, 2222^1\equiv 3, 2222^2\equiv 2, 2222^3\equiv 6, 2222^4\equiv 4, 2222^5\equiv 5, 2222^6\equiv 1\ldots$
$5555^0\equiv 1, 5555^1\equiv 4, 5555^2\equiv 2, 5555^3\equiv 1,\ldots$
Los restos potenciales de 2222 forman un ciclo de longitud 6, los de 5555 otro ciclo de longitud 3; entonces

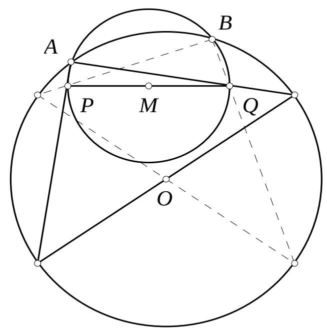
$$5555=925\times 6+5\Rightarrow 2222^{5555}\equiv 2222^5\equiv 5$$

$$2222=740\times 3+2\Rightarrow 5555^{2222}\equiv 5555^2\equiv 2$$

La demostración concluye sumando las dos últimas congruencias.

5. Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, inscribir un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y Q. ¿Para qué posiciones de P y Q el problema no tiene solución?

SOLUCIÓN:



Basta trazar la circunferencia de diámetro PQ, las eventuales intersecciones con la circunferencia inicial de centro O nos proporcionan dos puntos A y B que unidos con P y Q definen las soluciones.
No existe solución cuando ambas circunferencias no se cortan es decir cuando

$$OM + \frac{PQ}{2} < r$$

siendo r el radio de la circunferencia dada.

6. Sean a, b, c tres números positivos de suma uno. Demuestra que

$$a^{a^2+2ca}\, b^{b^2+2ab}\, c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

SOLUCIÓN:
Dado que $a+b+c=1,$ entonces $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) = 1.$
Además, $\ln\left(a^2\frac{1}{a} + b^2\frac{1}{b} + c^2\frac{1}{c} + 2ab\frac{1}{b} + 2bc\frac{1}{c} + 2ca\frac{1}{a}\right) = \ln 3.$ Aplicando la desigualdad de Jensen a la función $f(x) = \ln x$ que es cóncava en su dominio $(x > 0),$ se tiene, $\ln 3 = \ln\left(a^2\frac{1}{a} + b^2\frac{1}{b} + c^2\frac{1}{c} + 2ab\frac{1}{b} + 2bc\frac{1}{c} + 2ca\frac{1}{a}\right) \geq$

$a^2\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b^2\ln\left(\frac{1}{b}\right) + c^2\ln\left(\frac{1}{c}\right) + 2ca\ln\left(\frac{1}{a}\right) + 2ab\ln\left(\frac{1}{b}\right) + 2bc\ln\left(\frac{1}{c}\right) =$

$\ln\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+2ca}\left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab}\left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+2bc}\right].$

Teniendo en cuenta que la función $f(x) = \ln x$ es inyectiva resulta que
$\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+2ca}\left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab}\left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+2bc} \leq 3,$ o equivalentemente, $a^{a^2+2ca}\, b^{b^2+2ab}\, c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$

La igualdad se alcanza cuando $a = b = c = \frac{1}{3}.$