FASE LOCAL DE LA XLIV OME

PRIMERA SESIÓN

Mañana del viernes 18 de Enero de 2008

1. Sea P una familia de puntos en el plano tales que por cada cuatro puntos de P pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de P están en la misma circunferencia? Justifica la respuesta.

2. En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demuestra que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.

3. Halla las soluciones reales de la ecuación: $x\left(\frac{6-x}{x+1}\right)\left(\frac{6-x}{x+1}+x\right)=8.$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

FASE LOCAL DE LA XLIV OME

SEGUNDA SESIÓN

Tarde del viernes 18 de enero de 2008

4. Demuestra que $2222^{5555}+5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

5. Dada una circunferencia y dos puntos *P* y *Q* en su interior, inscribir un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por *P* y *Q*. ¿Para qué posiciones de *P* y *Q* el problema no tiene solución?

6. Sean a,b,c tres números positivos de suma uno. Demuestra que

$$a^{a^2+2ca}\,b^{b^2+2ab}\,c^{c^2+2bc}\geq\frac{1}{3}.$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.