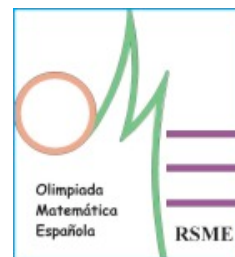




## XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase  
Primera sesión

Sábado mañana, 24 de enero de 2008



1. Probar que para todo entero positivo  $n$ ,  $n^{19} - n^7$  es divisible por 30.
  
2. Determinar el mayor número de planos en el espacio tridimensional para los que existen seis puntos con las siguientes condiciones:
  - i) Cada plano contiene al menos cuatro de los puntos.
  - ii) Cuatro puntos cualesquiera no pertenecen a una misma recta.
  
3. Los puntos de una retícula  $m \times n$  pueden ser de color blanco o negro. Una retícula se dice que está equilibrada si para cualquier punto  $P$  de ella, la fila y columna que pasan por este punto  $P$  tienen ambas el mismo número de puntos de igual color que  $P$ . Determinar todos los pares de enteros positivos  $(m, n)$  para los que existe una retícula equilibrada.

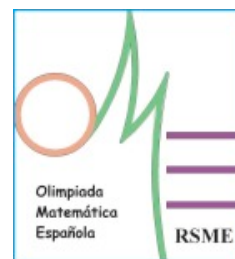
**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**



## XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase  
Segunda sesión

Sábado tarde, 24 de enero de 2008



4. En el interior de un paralelogramo  $ABCD$  se dibujan dos circunferencias. Una es tangente a los lados  $AB$  y  $AD$ , y la otra es tangente a los lados  $CD$  y  $CB$ . Probar que si estas circunferencias son tangentes entre sí, el punto de tangencia está en la diagonal  $AC$ .

5. Dado un número natural  $n$  mayor que 1, hallar todos los pares de números enteros  $a$  y  $b$ , tales que las dos ecuaciones  $x^n + ax - 2008 = 0$  y  $x^n + bx - 2009 = 0$  tengan, al menos, una raíz común real.

6. Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos circunferencias exteriores tangentes en el punto  $P$ . Por un punto  $A$  de  $C_2$  trazamos dos rectas tangentes a  $C_1$  en los puntos  $M$  y  $M'$ . Sean  $N$  y  $N'$  los puntos respectivos de corte, distintos ambos de  $A$ , de estas rectas con  $C_2$ .

Probar que  $|PN'| \cdot |MN| = |PN| \cdot |M'N'|$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**