# XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

**Primera sesión**

Sábado mañana, 24 de enero de 2008

**1.** Probar que para todo entero positivo $n$, $n^{19} - n^7$ es divisible por 30.

**2.** Determinar el mayor número de planos en el espacio tridimensional para los que existen seis puntos con las siguientes condiciones:

i) Cada plano contiene al menos cuatro de los puntos.

ii) Cuatro puntos cualesquiera no pertenecen a una misma recta.

**3.** Los puntos de una retícula $m \times n$ pueden ser de color blanco o negro. Una retícula se dice que está equilibrada si para cualquier punto $P$ de ella, la fila y columna que pasan por este punto $P$ tienen ambas el mismo número de puntos de igual color que $P$. Determinar todos los pares de enteros positivos $(m, n)$ para los que existe una retícula equilibrada.

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**
**El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

## XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

**Segunda sesión**

Sábado tarde, 24 de enero de 2008

**4.** En el interior de un paralelogramo $ABCD$ se dibujan dos circunferencias. Una es tangente a los lados $AB$ y $AD$, y la otra es tangente a los lados $CD$ y $CB$. Probar que si estas circunferencias son tangentes entre sí, el punto de tangencia está en la diagonal $AC$.

**5.** Dado un número natural $n$ mayor que $1$, hallar todos los pares de números enteros $a$ y $b$, tales que las dos ecuaciones $x^n + ax - 2008 = 0$ y $x^n + bx - 2009 = 0$ tengan, al menos, una raíz común real.

**6.** Sean $C_1$ y $C_2$ dos circunferencias exteriores tangentes en el punto $P$. Por un punto $A$ de $C_2$ trazamos dos rectas tangentes a $C_1$ en los puntos $M$ y $M'$. Sean $N$ y $N'$ los puntos respectivos de corte, distintos ambos de $A$, de estas rectas con $C_2$.

Probar que $|PN'| \cdot |MN| = |PN| \cdot |M'N'|$.

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**
**El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**