XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 23 de enero de 2008

SOLUCIONES

1. Calcular la suma $2\left[h\left(\frac{1}{2009}\right)+h\left(\frac{2}{2009}\right)+...+h\left(\frac{2008}{2009}\right)\right]$, siendo

$h(t)=\frac{5}{5+25^t}$, $t\in R$.

Solución:

Se observa que la función h es simétrica respecto al punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Por tanto,

$h(1-t)=\frac{5}{25^{1-t}+5}=\frac{5\cdot 5^t}{25+5\cdot 25^t}=\frac{25^t}{25^t+5}$, de donde $h(t)+h(1-t)=1$. La suma vale entonces $2\cdot 1004=2008$.

2. Si la sección producida por un plano al cortar un tetraedro es un rombo, probar que necesariamente el rombo es un cuadrado.

Solución:

Los lados opuestos de un rombo son paralelos. Las caras del tetraedro que contienen a dos de estos lados se cortan en una arista que, a su vez, será paralela al plano de corte y paralela a estos dos lados del rombo. Sean *A*, *B*, *C* y *D* los vértices del tetraedro, y supongamos que la arista paralela al plano de corte es la arista *AB*. De modo análogo, la otra arista paralela también al plano de corte y a los otros dos lados del rombo será la arista *CD*. Como *AB* y *CD* son perpendiculares, se tendrá que lados contiguos del rombo son perpendiculares, por lo que en efecto, se trata de un cuadrado.

3. Se consideran un cubo de $1cm$ de arista y dos vértices A y B diagonalmente opuestos de una cara del cubo. Se denomina camino de longitud n a una sucesión de $n+1$ vértices de forma que dos consecutivos están a $1cm$ de distancia. Entonces:¿Cuál de los siguientes números es mayor: el número de caminos de longitud 1000 cm que empiezan y acaban en A, o el número de caminos de longitud 1000 cm que empiezan en A y acaban en B ? Justifica la repuesta.

Solución:

Llamemos a_n al número de caminos de longitud $n\,cm$ que empiezan y acaban en A, y llamemos b_n al número de caminos de longitud n cm que empiezan en A y acaban en B.

El $(n-1)-$ ésimo vértice de un camino que termina en A sólo puede ser el propio A, o cualquiera de los vértices diagonalmente opuestos en alguna de las tres caras que concurren en A, uno de los cuales es el vértice B y los otros dos, C y D.

Ahora bien, hay tres caminos de longitud $2cm$ de A a A, correspondientes a las tres aristas del cubo por A. Además, hay dos caminos de longitud $2cm$ desde B hasta A, uno por cada uno de los otros dos vértices de la cara del cubo que los contiene, y similarmente para C y D.

Por tanto, como hay tantos caminos de longitud n cm de A a B como de A a C o a D,

$$a_n = 3a_{n-2} + 2b_{n-2} + 2b_{n-2} + 2b_{n-2}\ .$$

Un estudio análogo para el (n – 1)-ésimo vértice de un camino que termina en B nos conduce a sólo puede ser A, B, C o D.

$$b_n = 2a_{n-2} + 3b_{n-2} + 2b_{n-2} + 2b_{n-2}\ .$$

Restando ambas igualdades, tenemos $a_n - b_n = a_{n-2} - b_{n-2} = \cdots = a_0 - b_0 = 1 - 0 = 1$.

Luego hay exactamente 1 camino más de longitud $1000cm$ de A a A que de A a B.

XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera y segunda sesión

Viernes tarde, 23 de enero de 2008

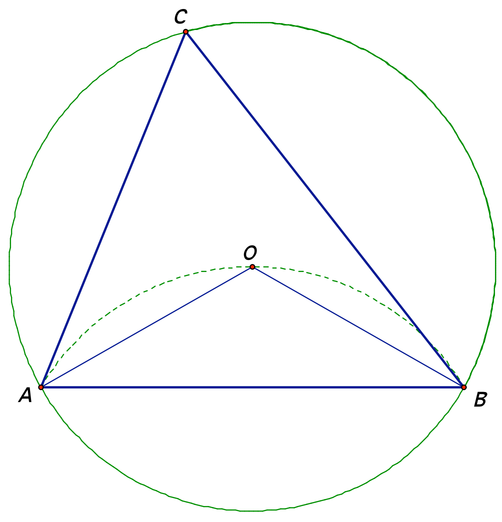
SOLUCIONES

1 y 4. Dado un triángulo acutángulo *ABC*, determinar para que puntos de su interior se verifican las siguientes desigualdades:

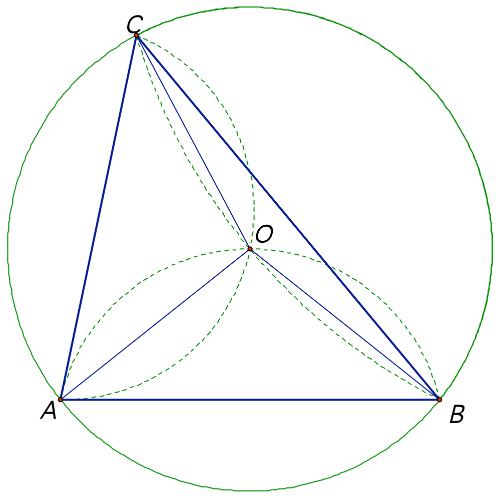
$$1 \le \frac{\angle APB}{\angle ACB} \le 2, \qquad 1 \le \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \le 2 \quad \text{y} \quad 1 \le \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \le 2.$$

Solución:

Sea O el cincuncentro del triángulo ABC. El valor del ángulo $AC\,B$, por estar inscrito en la circunferencia, es la mitad del ángulo AOB. De nuevo, para cualquier punto, P, sobre el arco AOB se tiene $\angle APB = \angle AOB = 2\angle ACB$. Por tanto, este arco separa el interior del triángulo en dos partes: para los puntos Q situados a un lado del arco AOB, el valor del ángulo $\angle AQB$ es mayor que $\angle AOB$ y para los situados al otro lado del arco el ángulo $\angle AQB$ es menor que $\angle AOB$. Así pues, los puntos del interior del triángulo que están sobre el arco AOB o fuera del segmento circular AOC son los que satisfacen la primera de las condiciones $1 \le \dfrac{\angle APB}{\angle ACB} \le 2$.



El mismo razonamiento para las cuerdas BC y CA nos conducen a que el punto O es el único que puede cumplir las tres condiciones.



2 y 5. La igualdad 2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55 es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de números distintos de más de una cifra, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un sólo dígito.

i) Encontrar una descomposición de este tipo para el número 2009.

ii) Determinar para el número 2009 todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

Solución:

Agrupando los números con igual cantidad de cifras tendremos la ecuación

$2009 = 1111a + 111b + 11c$

donde a, b y c son números enteros menores o iguales que $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$, puesto que los sumandos de la descomposición han de ser diferentes.

Se tiene entonces $2009 = 182 \cdot 11 + 7 = 11\,(101a + 10b + c\,) + b$. De donde $182 = 101a + 10b + c + (b - 7)/11$. Como a, b y c son números enteros, se tiene que b ha de ser de la forma $c = 11k + 7$, para algún valor natural de k comprendido entre 0 y 3 (recordar que $c \leq 45$).

Substituyendo, obtenemos que $182 = 101a + 110k + 70 + c + k$, de donde $112 = 101a + 111k + c$. Las posibles soluciones son ($a = 1$, $k = 0$, $c = 11$) y ($a = 0$, $k = 1$, $c = 1$). En el primer caso tenemos $b = 7$, y en el segundo $b = 18$, luego una descomposición puede ser $2009 = 1111 + 777 + 66 + 55$, en la que $c = 11$ se ha descompuesto como $6 + 5$.

Analizando las soluciones vemos que no es posible obtener una descomposición para 2009 con menos de 4 sumandos, siendo las del primer tipo $a = 1$, $b = 7$, $c = 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5$, y las del segundo tipo $a = 1$, $b = 9 + 8 + 1 = 9 + 7 + 2 = 9 + 6 + 3 = 9 + 5 + 4 = 8 + 7 + 3 = 8 + 6 + 4 = 7 + 6 + 5$, $c = 1$.

3 y 6. Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n+1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.

Solución:

Consideramos el punto que está conectado con el número más alto de puntos de otro color. Supongamos que este punto N es de color negro y que está conectado a k puntos de color blanco. Como $k \leq n$ y N está conectado a $n + 1$ puntos, existirá un punto A de color azul al que está conectado N. El número de puntos negros con los que está conectado A es necesariamente menor o igual que k, por lo que A está conectado con por lo menos $n + 1 - k$ puntos blancos. Como sólo hay n puntos de color blanco y el número de los conectados con N más los conectados con A suman por lo menos $n + 1$, necesariamente hay un punto blanco conectado a ambos, con lo que ya tenemos el triángulo buscado.