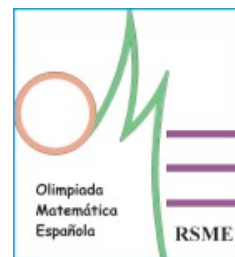




XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase
Primera sesión

Viernes tarde, 23 de enero de 2008



1. Dado un triángulo acutángulo ABC , determinar para que puntos de su interior se verifican las siguientes desigualdades:

$$1 \leq \frac{\angle APB}{\angle ACB} \leq 2, \quad 1 \leq \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \leq 2 \quad \text{y} \quad 1 \leq \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \leq 2.$$

2. La igualdad $2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55$ es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de números distintos de más de una cifra, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un sólo dígito.

i) Encontrar una descomposición de este tipo para el número 2009.

ii) Determinar para el número 2009 todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

3. Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n+1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**



XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 24 de enero de 2008



4. Probar que para todo entero positivo n , $n^{19} - n^7$ es divisible por 30.
5. Determinar el mayor número de planos en el espacio tridimensional para los que existen seis puntos con las siguientes condiciones:
- Cada plano contiene al menos cuatro de los puntos.
 - Cuatro puntos cualesquiera no pertenecen a una misma recta.
6. Los puntos de una retícula $m \times n$ pueden ser de color blanco o negro. Una retícula se dice que está equilibrada si para cualquier punto P de ella, la fila y columna que pasan por este punto P tienen el mismo número de puntos de igual color que P . Determinar todos los pares de enteros positivos (m, n) para los que existe una retícula equilibrada.

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**