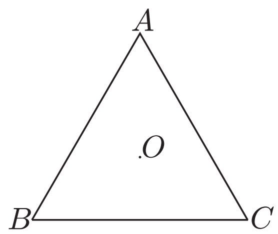
XLVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 15 de enero de 2010

1. Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O, como el de la figura.



Un rayo parte de O y se refleja en los tres lados, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A.

Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.

Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

2. Calcula las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt[4]{97 - X} + \sqrt[4]{X} = 5.$$

3. Dado el polinomio $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X + \square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

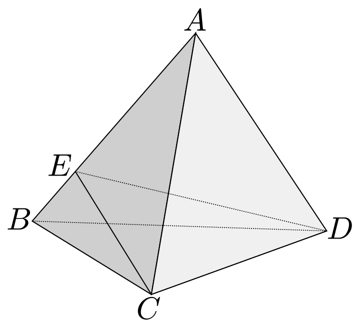
Sábado mañana, 16 de enero de 2010

4. Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.

(a) Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera, siempre quede alguna ficha sin eliminar.

(b) Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se puede eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas.

5. Se considera un tetraedro regular como el de la figura. Si el punto E recorre la arista AB. ¿Cuándo el ángulo $\widehat{CED}$ es máximo?



6. Decimos que un conjunto E de números naturales es *especial* cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a-b)^2$ divide al producto ab.

(a) Encuentra un conjunto *especial* formado por tres elementos.

(b) ¿Existe un conjunto *especial* formado por cuatro números naturales que están en progresión aritmética?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.