

**XLVII Olimpiada Matemática Española**  
**Fase nacional 2011 (Pamplona)**  
**Primera sesión (25 de marzo)**

---

● **Problema 1**

En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos  $n$  de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 colores posibles. Halla el valor mínimo de  $n$  que garantiza, que independientemente de cuáles sean los  $n$  segmentos elegidos y de cómo se haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color.

● **Problema 2**

Sean  $a, b, c$  números reales positivos. Demuestra que

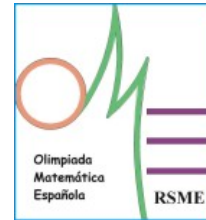
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

● **Problema 3**

Sean  $A, B, C, D$  cuatro puntos en el espacio, tales que no hay ningún plano que pasa por los cuatro a la vez. Los segmentos  $AB, BC, CD, DA$  son tangentes a una misma esfera. Demuestra que los cuatro puntos de tangencia están en un mismo plano.

**No está permitido el uso de calculadoras.**  
**Cada problema se puntúa sobre siete puntos.**  
**El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.**



**XLVII Olimpiada Matemática Española**  
**Fase nacional 2011 (Pamplona)**  
**Segunda sesión (26 de marzo)**

---

● **Problema 4**

Sea  $ABC$  un triángulo con  $\angle B = 2\angle C$  y  $\angle A > 90^\circ$ . Sean  $D$  el punto de la recta  $AB$  tal que  $CD$  es perpendicular a  $AC$ , y  $M$  el punto medio de  $BC$ . Demuestra que  $\angle AMB = \angle DMC$ .

● **Problema 5**

Cada número racional se pinta de un color, usando sólo dos colores, blanco y rojo. Se dice que una tal coloración es *sanferminera* cuando para cada dos números racionales  $x, y$ , con  $x \neq y$ , si se cumple una de las tres condiciones siguientes:

- a)  $xy = 1$ ,
- b)  $x + y = 0$ ,
- c)  $x + y = 1$ ,

entonces  $x$  e  $y$  están pintados de distinto color. ¿Cuántas coloraciones *sanfermineras* hay?

● **Problema 6**

Sea  $(S_n)$ , con  $n \geq 0$ , la sucesión definida por:

- (i)  $S_n = 1$  para  $0 \leq n \leq 2011$ .
- (ii)  $S_{n+2012} = S_{n+2011} + S_n$ , para  $n \geq 0$ .

Prueba que, para todo entero no negativo  $a$ , se cumple que  $S_{2011a} - S_a$ , es múltiplo de 2011.

**No está permitido el uso de calculadoras.**  
**Cada problema se puntúa sobre siete puntos.**  
**El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.**