XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 21 de enero de 2011

1. Se considera el polinomio de segundo grado $p(x) = ax^2+bx+c$, $(a \neq 0)$, cuyas raíces x_1 y x_2 se suponen distintas. Justifica que para que $p\left(x_1^3\right) = p\left(x_2^3\right)$ es suficiente que $a^2 + 3ac - b^2 = 0$. ¿Es también necesaria esta condición?

2. Denotemos $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Encuentra todas las funciones crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ con las siguientes propiedades:

i) $f(2) = 2$,

ii) $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo par $n, m \in \mathbb{N}$.

3. Un cuadrado C se recubre completamente con un número entero de cuadrados de lado unidad, sin solapamientos. Si uno coloca dentro de C y sin solapamientos tantos cuadrados como sea posible de área 2, con los lados paralelos a los lados de C, se pueden cubrir las ocho novenas partes del área del cuadrado. Determina todas las posibles dimensiones de tales cuadrados.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 22 de enero de 2011

4. Consideremos un alfabeto de n letras, con el que formaremos palabras. Diremos que una palabra contiene un palíndromo si un trozo de esa palabra, de más de una letra, se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo, la palabra OLIMPIADAS contiene el palíndromo ADA. Siendo k un entero mayor que 2, determina cuántas palabras de longitud k se pueden formar, con nuestro alfabeto de n letras, que no contengan ningún palíndromo de longitud impar.

5. Se ordenan los números naturales en forma de tabla triangular, es decir:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 2 & 3 & 4 & & \\
 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\
 & & & \cdots\cdots\cdots & & &
\end{array}
$$

Diremos que la posición de un número N en la tabla viene dada por dos "coordenadas": el primer número de su fila y el primer número de su columna. Por ejemplo, si $N = 15$, su posición es $(10, 9)$. Cuando un número N, en la posición (n, m), verifica que $N = n + m$ diremos que N *está bien colocado* en la tabla; así 12 y 14 están bien colocados en la tabla y 15 no lo está. ¿Está 2^{2011} bien colocado?

6. En un triángulo llamaremos O al circuncentro, I al incentro y r al radio de la circunferencia inscrita. Si la mediatriz del segmento OI corta a la circunferencia circunscrita en L, y LI vuelve a cortarla en M, demuestra que $IM = 2r$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.