

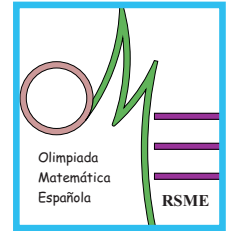


# XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 21 de enero de 2011



1. Los años recientes se han podido expresar como sumas, restas y multiplicaciones de números con un mismo y único dígito; por ejemplo:

$$2009 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 - 7 \times 7 \times 7 - 7 \times 7, \quad 2010 = 66 \times 6 \times 6 - 66 \times 6 + 6 \times 6 - 6$$

¿Se puede hacer lo mismo con el 2011, sin repetir jamás sumandos iguales? Por ejemplo, no es admisible  $2011 = 1 + 1 + 1 + \dots$

2. Dos semirrectas tienen su común origen en el punto  $O$ . Se considera una circunferencia  $C_1$  tangente a ambas semirrectas, cuyo centro está situado a distancia  $d_1$  de  $O$ , y cuyo radio es  $r_1$ . Se construyen sucesivamente las circunferencias  $C_n$ , de modo que  $C_n$  es tangente a las semirrectas, tangente exterior a  $C_{n-1}$  y tal que la distancia de su centro a  $O$ ,  $d_n$ , es menor que  $d_{n-1}$ , para  $n > 1$ . Halla la suma de las áreas de los círculos limitados por las circunferencias  $C_n$ , para todo  $n$ , en función de  $r_1$  y  $d_1$ .
3. Saber cuál es la última cifra de  $2009^{2011}$  es muy fácil, pero ¿cuántos ceros preceden a esa última cifra?

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

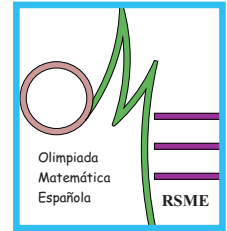


# XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 21 de enero de 2011



4. Calcula todos los números enteros  $a$ ,  $b$  y  $c$  tales que  $a^2 = 2b^2 + 3c^2$ .
5. Dos esferas de radio  $r$  son tangentes exteriores. Otras tres esferas de radio  $R$  son tangentes exteriores entre sí, dos a dos. Cada una de estas tres esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encuentra la relación entre  $R$  y  $r$ .
6. Denotamos por  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  el conjunto de números naturales excluido el cero y por  $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  el conjunto de números naturales incluido el cero. Encuentra todas las funciones  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$  que sean crecientes, es decir  $f(n) \geq f(m)$  si  $n > m$ , y tales que  $f(nm) = f(n) + f(m)$ , para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**