

XLVIII Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2012 (Santander)
Primera sesión (24 de marzo)

• **Problema 1**

Determinar razonadamente si el número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ es irracional para todo entero no negativo n .

• **Problema 2**

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de variable real con valores reales, tales que

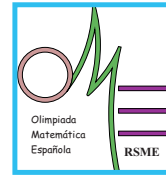
$$(x - 2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x))$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

• **Problema 3**

Sean x y n enteros tales que $1 \leq x < n$. Disponemos de $x + 1$ cajas distintas y $n - x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n, x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n - x$ bolas en las $x + 1$ cajas. Sea p un número primo. Encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n, x)$ para todo $x \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.



XLVIII Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2012 (Santander)
Segunda sesión (25 de marzo)

• **Problema 4**

Hallar todos los números enteros positivos n y k tales que $(n + 1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

• **Problema 5**

Una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ se define mediante la recurrencia

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}}, \quad \text{para } n \geq 3$$

Demostrar que todos los términos de la sucesión son números enteros y encontrar una fórmula explícita para a_n .

• **Problema 6**

Sea ABC un triángulo acutángulo, ω su circunferencia inscrita de centro I , Ω su circunferencia circunscrita de centro O , y M el punto medio de la altura AH , donde H pertenece al lado BC . La circunferencia ω es tangente a este lado BC en el punto D . La recta MD corta a ω en un segundo punto P , y la perpendicular desde I a MD corta a BC en N . Las rectas NR y NS son tangentes a la circunferencia Ω en R y S respectivamente. Probar que los puntos R, P, D y S están en una misma circunferencia.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.