

A1.-

Dado un entero positivo n , hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a $10n$ que no son múltiplos de 2 ni de 5.

Solución.

Sean los conjuntos

$$\begin{aligned}A &= \{1, 2, \dots, 10n\}, \\B &= \{2, 4, \dots, 2(5n)\}, \\C &= \{5, 10, \dots, 5(2n)\}, \\B \cap C &= \{10, 20, \dots, 10n\}.\end{aligned}$$

Nos piden la suma de los elementos de A que no son de B ni de C . Las sumas de los elementos de cada uno de los conjuntos es

$$\Sigma A = \frac{10n(10n+1)}{2}, \quad \Sigma B = 2\frac{5n(5n+1)}{2}, \quad \Sigma C = 5\frac{2n(2n+1)}{2}, \quad y$$

$$\Sigma(B \cap C) = \frac{10n(10n+1)}{2}.$$

La suma pedida es

$$\Sigma A - \Sigma B - \Sigma C + \Sigma(B \cap C) = 20n^2.$$

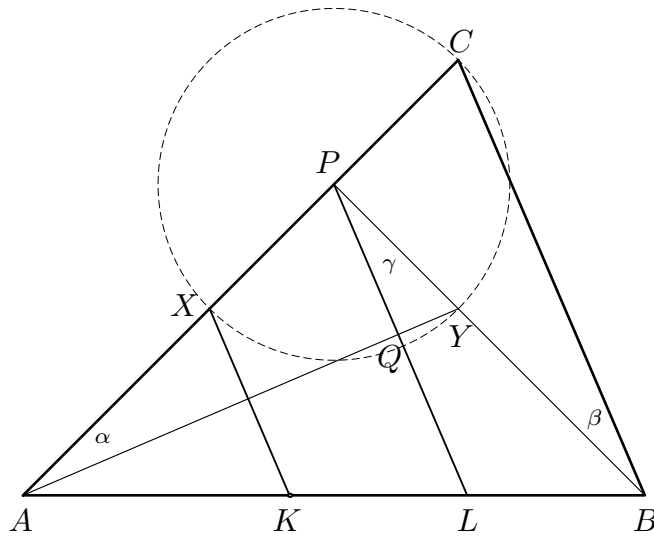
A2.-

Sea ABC un triángulo acutángulo con $\hat{A} = 45^\circ$, y sea P el pie de la altura por B . Trazamos la circunferencia de centro P que pasa por C y que vuelve a cortar a AC en el punto X y a la altura PB en el punto Y . Sean r y s las rectas perpendiculares a la recta AY por P y X , respectivamente, y L, K las intersecciones de r, s con AB . Demostrar que L es el punto medio de KB .

Solución.

Por construcción es $PX = PY = PC$. Los triángulos PAY y PCB , rectángulos en P , son iguales ya que $AP = PB$ (el triángulo rectángulo APB es isósceles) y $PY = PC$. Por tanto los ángulos α y β son iguales.

El triángulo rectángulo PYQ es semejante a los anteriores, de manera que el ángulo $\gamma = \widehat{LPB}$ es igual a α . Resulta que los segmentos PL y CB son paralelos, y por el teorema de Tales queda $KL=LB$ ya que $PX=PC$.

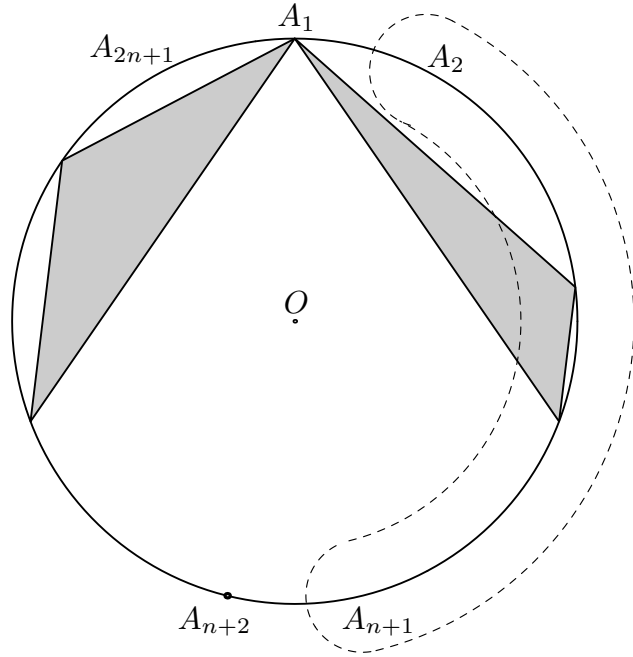


A3.-

Los puntos $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ son los vértices de un polígono regular de $2n + 1$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_i A_j A_k$ es obtusángulo.

Solución.

Al ser $2n + 1$ impar, no es posible construir triángulos rectángulos. Observemos que cualquier triángulo obtusángulo dejará el centro O (su circuncentro) fuera de él. Si lo giramos en sentido directo o inverso alrededor de O podemos conseguir que uno de sus vértices agudos esté en A_1 . Los otros dos están, bien en el conjunto $\{A_2, \dots, A_{n+1}\}$, bien en $\{A_{n+2}, \dots, A_{2n+1}\}$. El número buscado será $2\binom{n}{2}$. Como esto lo podemos hacer con cada uno de los $2n + 1$ vértices, quedarán $2(2n + 1)\binom{n}{2}$ triángulos. Pero cada triángulo lo hemos contado dos veces, una para cada vértice agudo. Luego la solución buscada es $(2n + 1)\binom{n}{2}$.

**Solución alternativa.**

Fijemos el vértice obtuso en un vértice, por ejemplo, el A_1 . Los tres lados del triángulo abarcarán respectivamente x, y y z lados del polígono de $2n + 1$ lados. Será $x + y + z = 2n + 1$. El lado opuesto al ángulo obtuso, digamos z , deberá cumplir $z \geq n + 1$. Calculemos el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x + y + z = 2n + 1$ con la condición fijada para la z .

Si $z = n + 1$, queda $x + y = n$ que tiene $n - 1$ soluciones. Si $z = n + 2$, queda $x + y = n - 1$ que tiene $n - 2$ soluciones. ... Si $z = 2n - 1$, queda $x + y = 1$ que tiene 1 solución.

En total hay

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n - 1)}{2} = \binom{n}{2}$$

soluciones con el ángulo obtuso en A_1 . Si consideramos las otras posibles posiciones para dicho ángulo queda en total

$$(2n + 1)\binom{n}{2}.$$

B1.-

Sean a , b i c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demuestra que, si la suma de estos números es mayor que la suma de sus inveros, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

Solución.

Puesto que $abc = 1$ y $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, tenemos que

$$\begin{aligned}(a - 1)(b - 1)(c - 1) &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 \\ &= a + b + c - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 0.\end{aligned}$$

La desigualdad anterior se cumple cuando uno de los factores del número

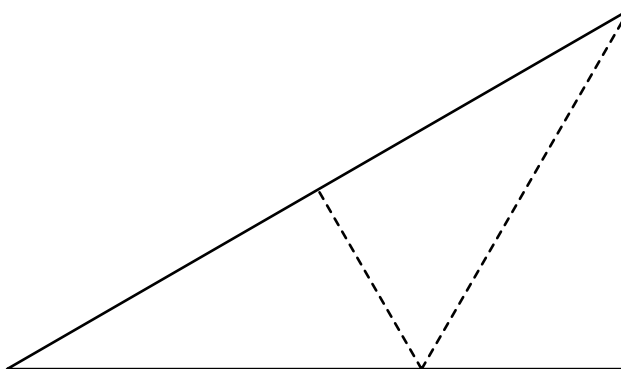
$$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$$

es positivo o los tres factores son positivos. Si fuesen positivos los tres, tendríamos $a > 1, b > 1$ y $c > 1$, cosa que no es posible ya que $abc = 1$. Por tanto, sólo uno de ellos es positivo i esto acaba la demostración.

B2.

En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos de 30° , 60° i 90° , se eligen 25 puntos cualesquiera. Demuestra que siempre habrá 9 de ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio $\frac{3}{10}$.

Solución. Este triángulo se puede descomponer en tres triángulos congruentes y semejantes al triángulo inicial.



Tenemos 3 triángulos y 25 puntos. En algún triángulo habrá al menos 9 puntos. La hipotenusa de cada uno de estos triángulos semejantes al inicial mide $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Los triángulos son rectángulos y por lo tanto están cubiertos por la mitad del círculo circunscrito. Esto acaba el problema ya que el radio de este círculo circunscrito, r , cumple

$$r = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{10}.$$

B3.

Sea ABC un triángulo arbitrario, P un punto interior y H_A , H_B i H_C , respectivamente, los ortocentros de los triángulos PBC , PAC y PAB . Demuestra que los triángulos $H_AH_BH_C$ y ABC tienen la misma área.

Solución.

Calculemos la distancia de un vértice A al ortocentro del triángulo ABC .

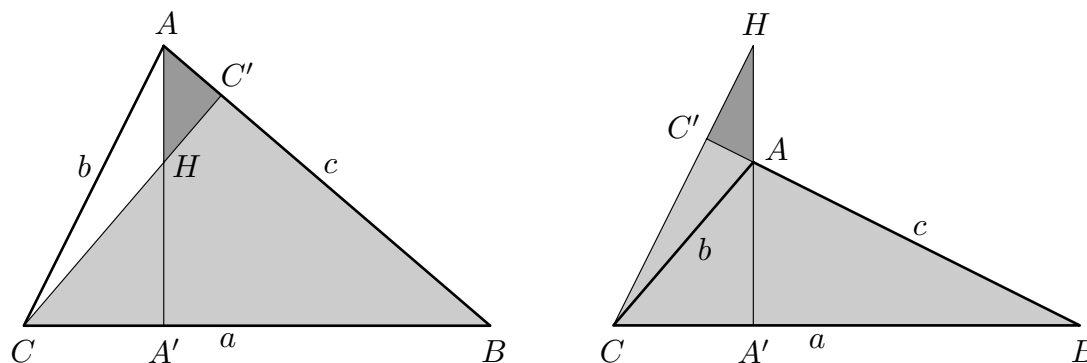
En las figuras siguientes podemos observar que los triángulos BCC' y AHC' son semejantes. (Recordemos que los ángulos de lados perpendiculares son iguales o suplementarios). De esta semejanza resulta

$$\frac{AH}{CB} = \frac{AC'}{CC'} \Leftrightarrow \frac{AH}{a} = \frac{AC'}{CC'}$$

i, per tant

$$AH = a \frac{AC'}{CC'}.$$

Si el triángulo es acutángulo (figura de la izquierda) tenemos que en el triángulo ACC' es, obviamente, $AC' = b \cos A$ y $CC' = b \sin A$.



Sustituyendo, queda

$$AH = a \cot A.$$

Si el triángulo ABC es rectángulo en A , la fórmula es también válida, però en este caso es $A = H$ y $AH = a \cot 90^\circ = 0$. Si es obtusángulo (figura de la derecha), el punto H es exterior al triángulo y queda $AC' = b \cos(180^\circ - A)$ y $CC' = b \sin(180^\circ - A)$, y por tanto, $AH = -a \cot A$. Pero en este caso $\cot A$ es negativa.

Les distàncies del ortocentro H a los vértices agudos de un triángulo rectángulo u obtusángulo salen de manera parecida.

Cuando unimos el punto arbitrario P con los vértices A , B y C del triángulo obtenemos los tres triángulos PAB , PBC y PCA .

Sean $\alpha = \angle BPC$, $\beta = \angle APC$, $\gamma = \angle APB$. Evidentemente, $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$. De estos tres ángulos, con mínimo dos son obtusos. El otro puede ser obtuso, recto o agudo. Estudiaremos los tres casos per separado.

1) Supongamos que los tres ángulos son obtusos (Figura 1). Por lo que hemos dicho al principio tenemos $PH_A = -a \cot \alpha$ y $PH_C = -c \cot \gamma$. Fijémonos que el ángulo $y = \angle H_A P H_C = 180^\circ - \angle APC = 180^\circ - \beta$ ya que los lados $H_A P$ y $H_C P$ son, respectivamente, perpendiculares a los lados, BC y AB y un es obtuso y el otro es agudo.

El área $\mathcal{A}(PH_A H_C)$ del triángulo $PH_A H_C$ es, obviamente,

$$\mathcal{A}(PH_A H_C) = \frac{\overline{PH_A} \overline{PH_C} \sin y}{2} = \frac{ac \cot \alpha \cot \gamma \sin B}{2} = \mathcal{A}(ABC) \cot \alpha \cot \gamma.$$

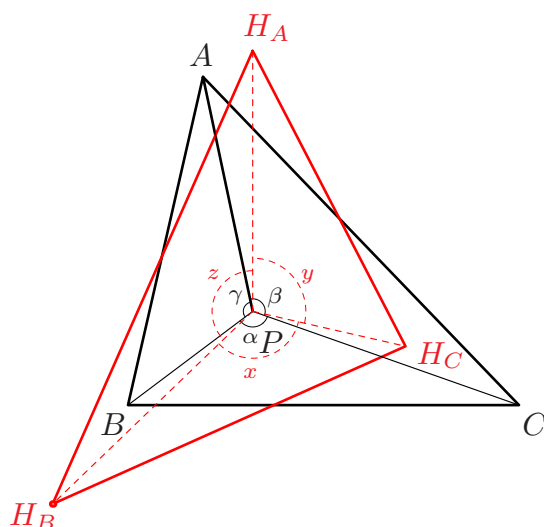


Figura 1

Sumando, pues, las áreas de los tres triángulos $PH_A H_B$, $PH_B H_C$ y $PH_C H_A$ obtenemos

$$\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(PH_A H_B) + \mathcal{A}(PH_B H_C) + \mathcal{A}(PH_C H_A) \quad \text{i}$$

$$\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(ABC) \left(\cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha \right).$$

Como que $\alpha + \beta = 360 - \gamma$, tenemos que $\cot(\alpha + \beta) = -\cot \gamma$ o, equivalentemente,

$$\cot \gamma = -\cot(\alpha + \beta) = \frac{1 - \cot \alpha \cot \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\text{o bien,} \quad \cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha = 1. \quad (*)$$

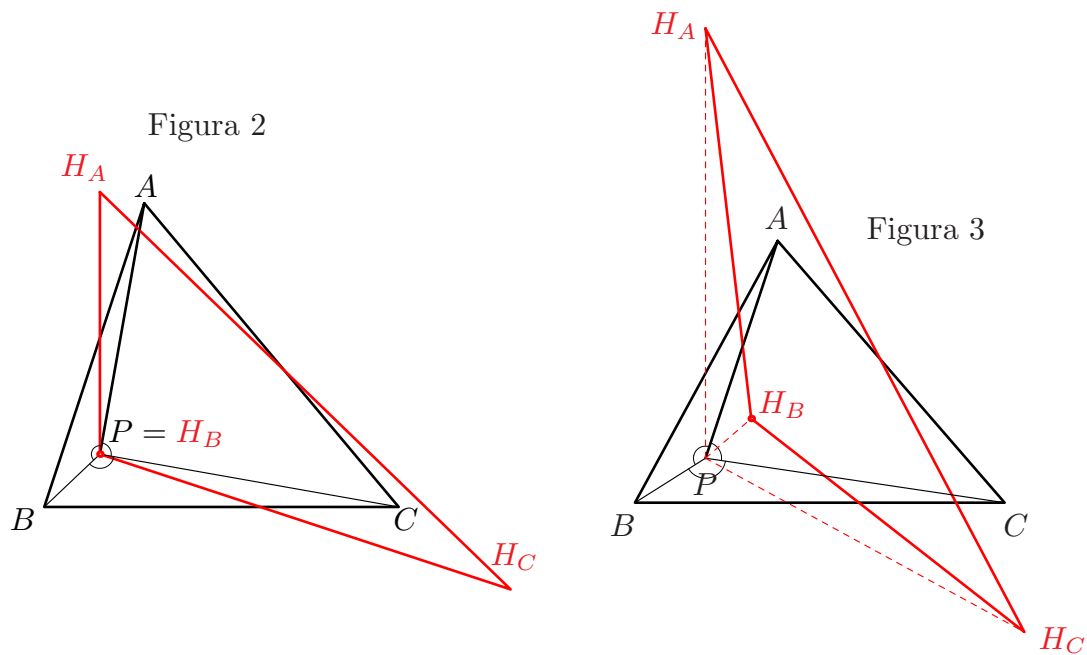
De aquí resulta $\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(ABC)$.

2) Supongamos que uno de los ángulos es recto, per ejemplo $\beta = 90^\circ$ (Figura 2). Entonces $H_B = P$ y

$$\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(H_A P H_C) = \frac{\overline{PH_A} \overline{PH_C} \sin y}{2} = \frac{ac \cot \alpha \cot \gamma \sin B}{2} = \mathcal{A}(ABC) \cot \alpha \cot \gamma$$

Pero la misma identidad (*) nos dice que si $\cot \beta = 0$ tiene que ser $\cot \alpha \cot \gamma = 1$, y de aquí el resultado en este caso.

3) Supongamos ahora que uno de los ángulos α, β, γ es agudo, por ejemplo, $\widehat{APC} = \beta < 90^\circ$ (Figura 3). El punto P es exterior al triángulo $H_A H_B H_C$ y tenemos $\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(P H_A H_C) - \mathcal{A}(P H_A H_B) - \mathcal{A}(P H_C H_B)$.



Pero en este caso tenemos $PH_B = b \cot \beta$, $PH_A = -a \cot \alpha$ i $PH_C = -c \cot \gamma$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(H_A H_B H_C) &= \mathcal{A}(P H_A H_C) - \mathcal{A}(P H_A H_B) - \mathcal{A}(P H_C H_B) = \\ &= (\cot \alpha \cot \gamma - (-\cot \alpha \cot \beta) - (-\cot \gamma \cot \beta)) \mathcal{A}(ABC) = \\ &= (\cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha) \mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABC). \end{aligned}$$