

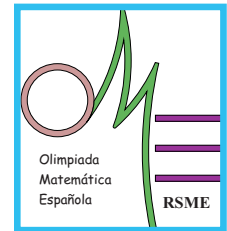


XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 16 de diciembre de 2011



1. Dado un entero positivo n , hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a $10n$ que no son múltiplos de 2 ni de 5.
2. Sea ABC un triángulo acutángulo con $\hat{A} = 45^\circ$, y sea P el pie de la altura por B . Trazamos la circunferencia de centro P que pasa por C y que vuelve a cortar a AC en el punto X y a la altura PB en el punto Y . Sean r y s las rectas perpendiculares a la recta AY por P y X , respectivamente, y L , K las intersecciones de r , s con AB . Demostrar que L es el punto medio de KB .
3. Los puntos $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ son los vértices de un polígono regular de $2n + 1$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_i A_j A_k$ es obtusángulo.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

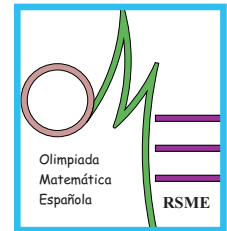


XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 16 de diciembre de 2011



4. Sean a , b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.
5. En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos respectivos de 30° , 60° y 90° , se eligen 25 puntos cualesquiera. Demostrar que siempre habrá 9 entre ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio $3/10$.
6. Sea P un punto interior a un triángulo ABC y sean H_A , H_B , H_C los ortocentros de los triángulos PBC , PAC y PAB , respectivamente. Demostrar que los triángulos $H_AH_BH_C$ y ABC tiene igual área.

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**