

**OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

***Fase Local***

***Mañana del Sábado***



**1** Dado un número entero  $n$  escrito en el sistema de numeración decimal, formamos el número entero  $k$  restando del número formado por las tres últimas cifras de  $n$  el número formado por las cifras anteriores restantes. Demostrar que  $n$  es divisible por 7, 11 o 13 si y sólo si  $k$  también lo es.

**2** Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio  $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$  valen lo mismo.

**3** En una sala de baile hay 15 chicos y 15 chicas dispuestos en dos filas paralelas de manera que se formarán 15 parejas de baile. Sucede que la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los 10 cm. Demostrar que si colocamos los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de alturas entre los miembros de las nuevas parejas así formadas no superarán los 10 cm.

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

**OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

***Fase Local***

***Tarde del Sábado***



**4** Demuestra que el producto de los dos mil trece primeros términos de la sucesión

$$a_n = 1 + \frac{1}{n^3}$$

no llega a valer 3.

**5** Resuelve esta ecuación exponencial

$$2^x \cdot 3^{5-x} + \frac{3^{5x}}{2^x} = 6$$

**6** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  los vértices de un triángulo y  $P$ ,  $Q$  y  $R$  los respectivos pies de las bisectrices trazadas desde esos mismos vértices. Sabiendo que  $PQR$  es un triángulo rectángulo en  $P$ , se te pide probar dos cosas:

- a) Que  $ABC$  ha de ser obtusángulo.
- b) Que en el cuadrilátero  $ARPQ$ , pese a no ser cíclico, la suma de sus ángulos opuestos es constante.

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**