OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Mañana del Sábado

1 *Dado un número entero n escrito en el sistema de numeración decimal, formamos el número entero k restando del número formado por las tres últimas cifras de n el número formado por las cifras anteriores restantes. Demostrar que n es divisible por 7, 11 o 13 si y sólo si k también lo es.*

Solución. Sea A el número formado por las tres últimas cifras de n y B el número formado por las cifras anteriores. Entonces $n = 1000B + A$ y $k = A - B$. Tenemos $n - k = 1001\,B = 7 \cdot 11 \cdot 13\,B$ y n y k son congruentes módulo 7, 11 y 13.

2 *Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ valen lo mismo.*

Solución. Sean r, s y t las raíces, reales o complejas, del polinomio $p(x)$ y sea S_n la suma de sus $n-$ésimas potencias, esto es, $S_n = r^n + s^n + t^n$. Por un lado, teniendo en cuenta las fórmulas de Cardano-Vièta resulta que $S_1 = r + s + t = -2$, $rs + st + tr = 3$ y $rst = -4$ lo que nos permite calcular S_2. En efecto,

$$S_2 = r^2 + s^2 + t^2 = (r + s + t)^2 - 2(rs + st + tr) = -2$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned} p(r) = r^3 + 2r^2 + 3r + 4 = 0 &\;\rightarrow\; r^3 = -2r^2 - 3r - 4 \\ p(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0 &\;\rightarrow\; s^3 = -2s^2 - 3s - 4 \\ p(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4 = 0 &\;\rightarrow\; t^3 = -2t^2 - 3t - 4 \end{aligned}$$

Sumando las expresiones anteriores, resulta

$$S_3 = r^3 + s^3 + t^3 = -2S_2 - 3S_1 - 12 = -2$$

quedando probado que las sumas de las tres primeras potencias de las raíces del polinomio $p(x)$ valen lo mismo: $s_1 = S_2 = S_3 = -2.$

3 *En una sala de baile hay* 15 *chicos y* 15 *chicas dispuestos en dos filas paralelas de manera que se formarán* 15 *parejas de baile. Sucede que* *la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los* 10 *cm. Demostrar que si colocamos los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de alturas entre los miembros de las nuevas parejas así formadas no superarán los* 10 *cm.*

Solución. Sean P_1, P_2,... P_{15} las quince parejas iniciales. Ordenemos ahora los chicos por alturas $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{15}$ y también las chicas $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{15}$. Supongamos que una de las parejas tuviese una diferencia de alturas superior a 10 cm, digamos $a_k - b_k > 10$. Entonces las parejas formadas por las chicas de alturas $b_1, \ldots, b_k$ y los chicos de alturas $a_k, \ldots, a_{15}$ también cumplirán $a_i - b_j > 10$. Coloquemos ahora cada una de las 16 personas mencionadas, de alturas $b_1, \ldots, b_k, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{15}$, en las parejas (cajas) P_s iniciales, según el lugar que ocupaban. Por el principio de las casillas (palomar), dos personas compartirán la misma caja. Por lo tanto en las parejas iniciales había una cuya diferencia de alturas era mayor que 10 cm, contra lo supuesto.

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Tarde del Sábado

4 *Demuestra que el producto de los dos mil trece primeros términos de la sucesión*

$$a_n = 1 + \frac{1}{n^3}$$

no llega a valer 3.

Solución. Veamos por inducción que $p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n \leq 3 - \frac{1}{n}$ y, así, quedará probado para el caso particular $n = 2013$ que se pide en el enunciado. Para $n = 1$ es $p_1 = a_1 = 1 + \frac{1}{1^3} = 2 \leq 3 - \frac{1}{1}$. Supongamos que es cierto para $n = k$, $p_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k \leq 3 - \frac{1}{k}$. Hemos de probar que se cumple para $n = k + 1$. Es decir, hemos de ver que $p_{k+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k \cdot a_{k+1} \leq 3 - \frac{1}{k+1}$. En efecto,

$$p_{k+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k \cdot a_{k+1} = p_k \cdot a_{k+1} \leq \left(3 - \frac{1}{k}\right)\left(3 - \frac{1}{k}\right)$$

$$= 3 - \frac{1}{k} + \frac{3}{(k+1)^3} - \frac{1}{k(k+1)^3}$$

Ahora falta ver que

$$3 - \frac{1}{k} + \frac{3}{(k+1)^3} - \frac{1}{k(k+1)^3} \leq 3 - \frac{1}{k+1}$$

lo caul es equivalente a probar que

$$\frac{3}{(k+1)^3} - \frac{1}{k(k+1)^3} \leq \frac{1}{-}\frac{1}{k+1} \Leftrightarrow k^2 - k + 2 = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0$$

5 *Resuelve la ecuación exponencial*

$$2^x \cdot 3^{5^{-x}} + \frac{3^{5^x}}{2^x} = 6$$

Solución. Aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica y, después, una de de sus más conocidas consecuencias (la suma de un número real positivo y su inverso es siempre mayor o igual que 2, y la igualdad sólo se da para el número 1) tenemos,

$$6 = 2^x 3^{5^{-x}} + 2^{-x} 3^{5^x} \geq 2\sqrt{2^x 3^{5^{-x}} 2^{-x} 3^{5^x}} = 6.$$

Y la igualdad se dará cuando los números mediados sean iguales.

$$2^x 3^{5^{-x}} = 2^{-x} 3^{5^x} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2x} = 3^{5^x - 5^{-x}} \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5^{-x}$$

esto es, cuando $x = 0$ que será, pues, la única solución de la ecuación.

6 *Sean A, B y C los vértices de un triángulo y P, Q y R los respectivos pies de las bisectrices trazadas desde esos mismos vértices. Sabiendo que PQR es un triángulo rectángulo en P, se te pide probar dos cosas:*

a) *Que ABC ha de ser obtusángulo.*

b) *Que en el cuadrilátero $ARPQ$, pese a no ser cíclico, la suma de sus ángulos opuestos es constante.*

Solución. Para resolver el problema utilizaremos dos herramientas fundamentales en los problemas geométricos relativos a triángulos: el teorema de la bisectriz *(La bisectriz de un ángulo de un triángulo corta al lado opuesto en dos segmentos de longitudes proporcionales a los otros dos lados del triángulo)* y el teorema de Stewart *(Si en un triángulo ABC consideramos un punto P en el lado AB , entonces se cumple que $AP^2\, a = PB\, b^2 + PC\, c^2 - PB\, PC\, a$).*
Sea ahora el punto P pie de la bisectriz de nuestro problema. Por el teorema de la bisectriz tenemos

$$PB = \frac{ac}{b+c} \text{ y } \; PC = \frac{ab}{b+c}.$$

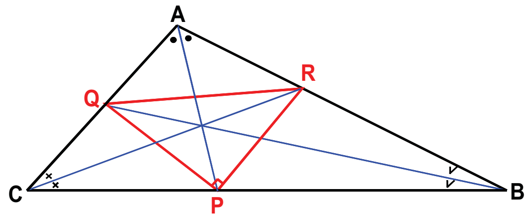
Ahora, aplicando el teorema de Stewart queda

$$AP^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)$$

y, substituyendo a^2 por su expresión obtenida del teorema del coseno

$$AP = \frac{2bc}{(b+c)^2} \cos\frac{A}{2}.$$

Calculemos ahora los lados del triángulo PQR.



Por el teorema del coseno y los teoremas de la bisectriz y de Stewart obtendremos

$$PR^2 = AP^2 + QA^2 - 2AP\,RA\cos A = \frac{4b^2c^2(a-b)\cos^2 A/2}{(b+c)^2(a+b)} + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2},$$

$$QR^2 = QA^2 + RA^2 - 2QA\,RA\cos A = \frac{4b^2c^2(a-b)\cos^2 A/2}{(b+c)^2(a+b)} + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2},$$

$$PR^2 = AP^2 + QA^2 - 2AP\,RA\cos A = \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{2b^2c^2\cos A}{(a+b)(a+c)}.$$

Como que el triángulo PQR es rectángulo $PQ^2 + PR^2 = QR^2$, substituyendo y simplificando, tenemos

$$2a^2 - b^2 - c^2 + (2a^2 + 2bc)\cos A = 0$$

de donde sale $\cos A = -1/2$, $A = 120°$ y de aquí $R + Q = 150°$.