**OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

***Fase Local***

***Tarde del Viernes***

**4** *Calcula la suma de los inversos de los dos mil trece primeros términos de la sucesión de término general*

$$a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$$

**Solución.** El término general se puede escribir como

$$a_n = \frac{4n^2 - 1}{4n^2} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{4n^2}$$

y su inverso es

$$\frac{1}{a_n} = \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n-1} + \frac{n}{2n+1}$$

Hemos de calcular

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2012}} + \frac{1}{a_{2013}}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{2012}{4023} + \frac{2012}{4025}\right) + \left(\frac{2013}{4025} + \frac{2013}{4027}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{2012}{4025} + \frac{2013}{4025}\right) + \frac{2013}{4027}$$

$$= 2013 + \frac{2013}{4027} = 2013\left(1 + \frac{1}{4027}\right) = \frac{8108364}{4027} \simeq 2013.5$$

**5** *Obtén los dos valores enteros de $x$ más próximos a $2013°$, tanto por defecto como por exceso, que cumplen esta ecuación trigonométrica*

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$$

**Solución.** Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resulta

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x}} = 2\sqrt{2^{\sin^2 x + \cos^2 x}} = 2\sqrt{2}$$

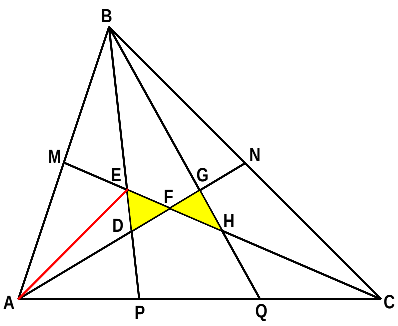
La igualdad se alcanza cuando $2^{\sin^2 x} = 2^{\cos^2 x}$. Es decir, cuando $\sin^2 x = \cos^2 x$ o $\sin x = \pm \cos x$. Los valores de $x$ que satisfacen la igualdad anterior son $x = 45° + 90°k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Los valores pedidos se obtienen para

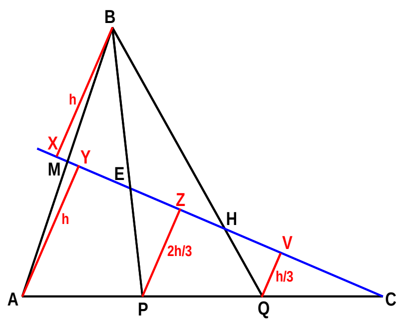
$$k_1 = \left[\frac{2013° - 45°}{90}\right] = 21 \quad \text{y} \quad k_1 = \left[\frac{2013° + 45°}{90}\right] = 22$$

y son $x_1 = 1935°$ y $x_2 = 2025°$.

**6** *Por los puntos medios de dos lados de un triángulo $ABC$ trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior, se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice). Se pide calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita.*

**Solución.** Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el área del triángulo $ABC$ es uno. Es decir, $[ABC] = 1$. Tenemos




Las medianas dividen al triángulo en seis partes de igual área, luego: $[AMF] = [FNC] = \dfrac{1}{6}$ y $[AFC] = 2 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$. Trazamos, desde $B, A, P$ y $Q$, perpendiculares sobre la mediana $CM$ y sean $X, Y, Z$ y $V$ sus respectivos pies tal y como muestra la figura de la derecha. En esta figura se tiene trabajando con la mediana $CM$ :

- $AMY \equiv BMX$. Como $AM = MB$ entonces $AY = XB = h$.
- $AYC \cong PZC \cong QVC$. Como $AP = PQ = QC$, entonces $PZ = \dfrac{2}{3}h$ y $QV = \dfrac{1}{3}h$.

- $PEZ \cong XBE$. Como $PZ = \frac{2}{3}XB \to PE = \frac{2}{3}EB \to PE = \frac{2}{5}PB$ y $EB = \frac{3}{5}PB$.
- $QHV \cong XBH$. Como $QV = \frac{1}{3}QB \to QH = \frac{1}{3}HB \to QH = \frac{1}{4}QB$

Y trabajando, análogamente[1], sobre la otra mediana AN, se obtiene

$$QG = \frac{2}{5}QB \quad GB = \frac{3}{5}QB \quad \text{y} \quad PD = \frac{1}{4}PB$$

Nos fijamos, por ejemplo, en la ceviana $PB$ y ya podemos conocer la proporción en que los puntos $D$ y $E$ la dividen. Falta

$$DE = PE - PD = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) PB = \frac{3}{20}PB$$

Por tanto,

$$PD = \frac{5}{20}PB \quad DE = \frac{3}{20}PB \quad \text{y} \quad EB = \frac{12}{20}PB$$

Ahora dibujamos la línea auxiliar $AE$. Sobre la ceviana $PB, ABP$ de área conocida queda dividido en tres triángulos, $ABE, AED$ y $ADP$, de idéntica altura. Por tanto,

$$\frac{[ADP]}{[ABP]} = \frac{PD}{PB} = \frac{5}{20}, \quad \frac{[AED]}{[ABP]} = \frac{DE}{PB} = \frac{3}{20}, \quad \frac{[ABE]}{[ABP]} = \frac{EB}{PB} = \frac{12}{20}$$

De

$$[ABP] = \frac{1}{3} \to [ADP] = \frac{5}{60}, \quad [AED] = \frac{3}{60} \quad \text{y} \quad [ABE] = \frac{12}{60}$$

Por otro lado, como $EM$ es mediana del triángulo $ABE$, se tiene $[AME] = \frac{1}{2}[ABE] = \frac{6}{60}$. Finalmente,

$$\frac{1}{6} = [AMF] = [AME] + [AED] + [DEF] = \frac{6}{60} + \frac{3}{60} + [DEF]$$

de donde resulta el área de media pajarita. Es decir, $[DEF] = \frac{1}{60}$. Análogamente, $[FGH] = \frac{1}{60}$, y el área pedida es

$$[DEF] + [FGH] = \frac{1}{30} = \frac{1}{30}[ABC]$$

[1]Todo esto es equivalente a aplicar el Teorema de Menelao sobre las transversales de un triángulo

**OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

## *Fase Local*

## *Mañana del Sábado*

***1*** *Dado un número entero $n$ escrito en el sistema de numeración decimal, formamos el número entero $k$ restando del número formado por las tres últimas cifras de $n$ el número formado por las cifras anteriores restantes. Demostrar que $n$ es divisible por 7, 11 o 13 si y sólo si $k$ también lo es.*

**Solución.** Sea $A$ el número formado por las tres últimas cifras de $n$ y $B$ el número formado por las cifras anteriores. Entonces $n = 1000B + A$ y $k = A - B$. Tenemos $n - k = 1001\,B = 7 \cdot 11 \cdot 13\,B$ y $n$ y $k$ son congruentes módulo 7, 11 y 13.

***2*** *Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ valen lo mismo.*

**Solución.** Sean $r, s$ y $t$ las raíces, reales o complejas, del polinomio $p(x)$ y sea $S_n$ la suma de sus $n-$ésimas potencias, esto es, $S_n = r^n + s^n + t^n$. Por un lado, teniendo en cuenta las fórmulas de Cardano-Vièta resulta que $S_1 = r + s + t = -2$, $rs + st + tr = 3$ y $rst = -4$ lo que nos permite calcular $S_2$. En efecto,

$$S_2 = r^2 + s^2 + t^2 = (r + s + t)^2 - 2(rs + st + tr) = -2$$

Y por otro lado:

$$\begin{array}{rcl} p(r) = r^3 + 2r^2 + 3r + 4 = 0 & \rightarrow & r^3 = -2r^2 - 3r - 4 \\ p(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0 & \rightarrow & s^3 = -2s^2 - 3s - 4 \\ p(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4 = 0 & \rightarrow & t^3 = -2t^2 - 3t - 4 \end{array}$$

Sumando las expresiones anteriores, resulta

$$S_3 = r^3 + s^3 + t^3 = -2S_2 - 3S_1 - 12 = -2$$

quedando probado que las sumas de las tres primeras potencias de las raíces del polinomio $p(x)$ valen lo mismo: $s_1 = S_2 = S_3 = -2$.

***3*** *En una sala de baile hay* 15 *chicos y* 15 *chicas dispuestos en dos filas paralelas de manera que se formarán* 15 *parejas de baile. Sucede que* *la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los* 10 *cm. Demostrar que si colocamos los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de alturas entre los miembros de las nuevas parejas así formadas no superarán los* 10 *cm.*

**Solución.** Sean $P_1$, $P_2$,... $P_{15}$ las quince parejas iniciales. Ordenemos ahora los chicos por alturas $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{15}$ y también las chicas $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{15}$. Supongamos que una de las parejas tuviese una diferencia de alturas superior a 10 cm, digamos $a_k - b_k > 10$. Entonces las parejas formadas por las chicas de alturas $b_1, \ldots, b_k$ y los chicos de alturas $a_k, \ldots, a_{15}$ también cumplirán $a_i - b_j > 10$. Coloquemos ahora cada una de las 16 personas mencionadas, de alturas $b_1, \ldots, b_k, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{15}$, en las parejas (cajas) $P_s$ iniciales, según el lugar que ocupaban. Por el principio de las casillas (palomar), dos personas compartirán la misma caja. Por lo tanto en las parejas iniciales había una cuya diferencia de alturas era mayor que 10 cm, contra lo supuesto.