OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Tarde del Viernes

4 Calcula la suma de los inversos de los dos mil trece primeros términos de la sucesión de término general

$$a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$$

5 Obtén los dos valores enteros de x más próximos a $2013°$, tanto por defecto como por exceso, que cumplen esta ecuación trigonométrica:

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$$

6 Por los puntos medios de dos lados de un triángulo ABC trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior, se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice). Se pide calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Mañana del Sábado

1 Dado un número entero n escrito en el sistema de numeración decimal, formamos el número entero k restando del número formado por las tres últimas cifras de n el número formado por las cifras anteriores restantes. Demostrar que n es divisible por 7, 11 o 13 si y sólo si k también lo es.

2 Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ valen lo mismo.

3 En una sala de baile hay 15 chicos y 15 chicas dispuestos en dos filas paralelas de manera que se formarán 15 parejas de baile. Sucede que la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los 10 cm. Demostrar que si colocamos los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de alturas entre los miembros de las nuevas parejas así formadas no superarán los 10 cm.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.