L Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 17 de enero de 2014

1. Tenemos 50 fichas numeradas del 1 al 50, y hay que colorearlas de rojo o azul. Sabemos que la ficha 5 es de color azul. Para la coloración del resto de fichas se siguen las siguientes reglas:

a) Si la ficha con el número x y la ficha con el número y son de distinto color, entonces la ficha con el número $|x-y|$ se pinta de color rojo.

b) Si la ficha con el número x y la ficha con el número y son de distinto color y $x \cdot y$ es un número entre 1 y 50 (incluyendo ambos), entonces la ficha con el número $x \cdot y$ se pinta de color azul.

Determinar cuántas coloraciones distintas se pueden realizar en el conjunto de fichas.

2. Determinar cuántas soluciones reales tiene la ecuación

$$\sqrt{2-x^2} = \sqrt[3]{3-x^3}$$

3. Sea ΔABC un triángulo y D, E y F tres puntos cualesquiera sobre los lados AB, BC y CA respectivamente. Llamemos P al punto medio de AE, Q al punto medio de BF y R al punto medio de CD. Probar que el área del triángulo ΔPQR es la cuarta parte del área del triángulo ΔDEF.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

L Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2014

4. Se considera un polígono regular de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Probar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.

5. Hallar las soluciones enteras de la ecuación

$$x^4 + y^4 = 3x^3y$$

6. Probar que

$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$$

es múltiplo de

$$2014^3 - 1013^3 - 1001^3$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.