

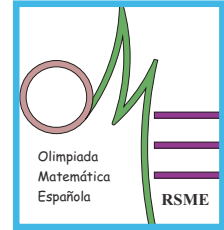


L Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 17 de enero de 2014



1. Tenemos 50 fichas numeradas del 1 al 50, y hay que colorearlas de rojo o azul. Sabemos que la ficha 5 es de color azul. Para la coloración del resto de fichas se siguen las siguientes reglas:

- Si la ficha con el número x y la ficha con el número y son de distinto color, entonces la ficha con el número $|x - y|$ se pinta de color rojo.
- Si la ficha con el número x y la ficha con el número y son de distinto color y $x \cdot y$ es un número entre 1 y 50 (incluyendo ambos), entonces la ficha con el número $x \cdot y$ se pinta de color azul.

Determinar cuántas coloraciones distintas se pueden realizar en el conjunto de fichas.

2. Determinar cuántas soluciones reales tiene la ecuación

$$\sqrt{2 - x^2} = \sqrt[3]{3 - x^3}$$

3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y D , E y F tres puntos cualesquiera sobre los lados AB , BC y CA respectivamente. Llamemos P al punto medio de AE , Q al punto medio de BF y R al punto medio de CD . Probar que el área del triángulo $\triangle PQR$ es la cuarta parte del área del triángulo $\triangle DEF$.

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

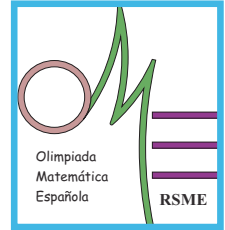


L Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2014



4. Se considera un polígono regular de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Probar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.

5. Hallar las soluciones enteras de la ecuación

$$x^4 + y^4 = 3x^3y$$

6. Probar que

$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$$

es múltiplo de

$$2014^3 - 1013^3 - 1001^3$$

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**