Problemas Segunda Sesión

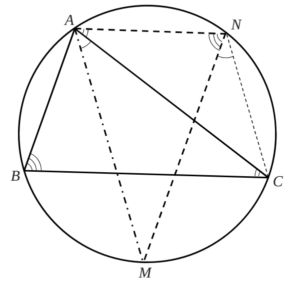
1. *Alrededor de una mesa circular están sentadas seis personas. Cada una lleva un sombrero. Entre cada dos personas hay una mampara de modo que cada una puede ver los sombreros de las tres que están enfrente, pero no puede ver el de la persona de su izquierda ni el de la de su derecha ni el suyo propio. Todas saben que tres de los sombreros son blancos y tres negros. También saben que cada una de ellas es capaz de obtener cualquier deducción lógica que sea factible. Empezamos por una de las seis personas y le preguntamos "¿puedes deducir el color de algún sombrero de los que no ves?". Una vez que ha respondido (todas oyen la respuesta), pasamos a la persona de su izquierda y le hacemos la misma pregunta, y así sucesivamente. Demuestra que una de las tres primeras responderá "Sí".*

Solución. Numeramos las personas en el orden en que van respondiendo, con lo que la persona 1 ve los sombreros de las personas $3, 4, 5$, la persona 2 los de las personas $4, 5, 6$, y la persona 3 los de las personas $5, 6, 1$.
Supongamos que ni la persona 1 ni la persona 2 han podido responder "Sí". Los sombreros de las personas $3, 4, 5$ no pueden ser todos del mismo color, porque si no la persona 1 sabría que todos los sombreros que no ve son del otro color. Si los sombreros de las personas $4, 5$ fueran del mismo color, entonces la persona 2 sabe que el sombrero 3 ha de ser del otro color, con lo que los sombreros $4, 5$ han de ser de distinto color. Pero entonces la persona 3 sabe que el color del sombrero 4, que no ve, es distinto al del sombrero 5, que sí ve. Luego o una de las dos primeras personas contesta "Sí", o si las dos primeras contestan "No", entonces la tercera contesta "Sí".

$\square$

2. *El triángulo ABC es isósceles en C, y sea Γ su circunferencia circunscrita. Sea M el punto medio del arco BC de Γ que no contiene a A, y sea N el punto donde la paralela a AB por M vuelve a cortar a Γ. Se sabe que AN es paralela a BC. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de ABC?*

Solución. Si AN es paralela a BC, entonces $ABCN$ es un trapecio con circunferencia circunscrita, y por lo tanto isósceles.



Se tiene entonces que $\angle ANC = \angle BAN$. Pero $\angle NAC = \angle ACB$ y $\angle ANM = \angle ABC$ por ser AN y BC paralelas, y ser AB y MN también paralelas. Tenemos entonces por una parte que $\angle BAN = \angle A + \angle C$. Finalmente, $\angle CNM = \angle CAM = \frac{1}{2}\angle A$ por ser M el punto medio del arco BC, siendo entonces AM la bisectriz de $\angle A$, con lo que $\angle ANC = \angle B + \frac{1}{2}\angle A$. Igualando ambos ángulos, y usando que $\angle A = \angle B$ por ser ABC isósceles en C, se tiene que $\angle A = \angle B = 2\angle C$, luego $180° = \angle A + \angle B + \angle C = 5\angle C$, para $\angle C = 36°$, y $\angle A = \angle B = 72°$.

$\square$

3. Sean x, y, z reales positivos tales que $x+y+z = 3$. Halla el valor máximo alcanzado por

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6}.$$

¿Para qué valores de x, y, z se alcanza dicho máximo?

Solución 1. Consideremos los vectores $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y+1}, \sqrt{z+2}\right)$ y $\left(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, cuyas coordenadas son todas reales y positivas, cuyos módulos respectivos son $\sqrt{x+y+z+3} = \sqrt{6}$ y $\sqrt{1+2+3} = \sqrt{6}$, y cuyo producto escalar es la expresión cuyo máximo se pide hallar. Por la desigualdad del producto escalar, el valor máximo es igual al producto de módulos de vectores, que es 6, dándose la igualdad cuando ambos vectores son proporcionales. En este caso, al tener ambos vectores el mismo módulo, se da la igualdad si y sólo si ambos vectores son iguales, es decir,

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6} \leq 6,$$

con igualdad si y sólo si $x = y = z = 1$.

Solución 2. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es cóncava, por lo tanto, por la desigualdad de Jensen, se tiene que

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6} = f(x) + 2f\left(\frac{y+1}{2}\right) + 3f\left(\frac{z+2}{3}\right) \leq$$

$$\leq 6f\left(\frac{x+(y+1)+(z+2)}{6}\right) = 6f(1) = 6,$$

con igualdad si y sólo si $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$, es decir, $y = 2x-1$ y $z = 3x-2$, con lo que $x+y+z = 6x-3 = 3$, o $x = y = z = 1$.

$\square$

4. Encuentra todas las aplicaciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que verifican $f(n) + f(n+1) = 2n+1$ para cualquier entero n y además

$$\sum_{i=1}^{63} f(i) = 2015.$$

Solución. Nótese que $f(n+1) = 2n+1-f(n)$, con lo que podemos hallar sucesivamente

$$f(1) = 1 - f(0), \qquad f(2) = 3 - f(1) = 2 + f(0), \qquad f(3) = 5 - f(2) = 3 - f(0), \ldots$$

Esto nos permite conjeturar que $f(n) = n + (-1)^n f(0)$ para todo $n \geq 0$, cosa que podemos demostrar por inducción, siendo cierto como ya se ha visto para $n = 1, 2, 3$, y si es cierto para n, entonces

$$f(n+1) = 2n + 1 - n - (-1)^n f(0) = n + 1 + (-1)^{n+1} f(0).$$

Luego es cierto para todo entero positivo n. Inducción hacia atrás, usando que $f(n) = 2n + 1 - f(n+1)$ nos permite comprobar igualmente que esta expresión es de hecho válida para todo entero n, también negativo.
Nótese ahora que en $\{1, 2, 3, \ldots, 63\}$ hay exactamente un entero impar más que enteros pares. En la imagen de cada entero par aparece $f(0)$ con signo positivo, y en la de cada entero impar con signo negativo, luego

$$2015 = \sum_{i=1}^{63} f(i) = -f(0) + \sum_{i=1}^{63} i = \frac{63 \cdot 64}{2} - f(0) = 2016 - f(0).$$

Concluímos que $f(0) = 1$, con lo que la única función que satisface las condiciones de enunciado es

$$f(n) = n + (-1)^n.$$

□

5. *Sea $n \geq 2$ un entero positivo. Tenemos $2n$ bolas, en cada una de las cuales hay escrito un entero. Se cumple que, siempre que formamos n parejas con las bolas, dos de estas parejas tienen la misma suma.*

(1) Demuestra que hay cuatro bolas con el mismo número.

(2) Demuestra que el número de valores distintos que hay en las bolas es como mucho $n - 1$.

Solución. (1) Sean los valores de las bolas, en orden no creciente, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n}$. Formemos la pareja k-ésima emparejando la bola a_{2k-1} con la bola a_{2k} para $k = 1, 2, \ldots, n$, con lo que sus sumas son

$$s_1 = a_1 + a_2 \geq s_2 = a_3 + a_4 \geq \cdots \geq s_n = a_{2n-1} + a_{2n}.$$

Al estar las sumas en orden no creciente, si dos de ellas son iguales, han de ser iguales dos sumas consecutivas, es decir ha de ser $a_{2k-1} + a_{2k} = a_{2k+1} + a_{2k+2}$, con $a_{2k-1} \geq a_{2k} \geq a_{2k+1} \geq a_{2k+2}$, luego obviamente estos cuatro enteros han de ser iguales.

(2) Supongamos que hay al menos n valores distintos, que podemos ordenar en orden decreciente $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Ordenamos ahora los valores de las restantes n bolas en orden no creciente, $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$. Haciendo las parejas (b_i, c_i) para $i = 1, 2, \ldots, n$ es claro que las parejas i-ésima e $i+1$-ésimas tienen valores $b_i + c_i > b_{i+1} + c_{i+1}$, con lo que las parejas están ordenadas con valores de suma estrictamente decrecientes, y no puede haber dos con la misma suma, contradicción. Luego hay a lo sumo $n - 1$ valores distintos.

□

6. *Encuentra todos los enteros positivos n, que verifican*

$$n = 2^{2x-1} - 5x - 3 = \left(2^{x-1} - 1\right)\left(2^x + 1\right)$$

para algún entero positivo x.

Solución 1. Realizando el producto del miembro de la derecha y reorganizando términos, la igualdad entre los miembros segundo y tercero se puede escribir como

$$2^{x-1} = 5x + 2.$$

Se comprueba fácilmente que ni $x = 1$ ni $x = 2$ son soluciones, mientras que si $x \geq 3$, entonces $5x + 2$ ha de ser múltiplo de 4, luego x es par pero no múltiplo de 4, es decir, $x \geq 6$. Para $x = 6$, se comprueba que $2^{x-1} = 5x + 2 = 32$, con lo que sería una posible solución. Nótese ahora que si para $x \geq 6$ se tiene que $2^{x-1} > 5x$ (cosa que es cierta para $x = 6$), entonces $2^x > 10x > 5(x + 1) + 2$, es decir, por inducción 2^{x-1} siempre será mayor que $5x + 2$ para todo $x \geq 7$. Luego el único valor que puede tomar el entero positivo x es 6, que a su vez resulta en

$$n = 2^{11} - 30 - 3 = 2048 - 33 = 2015.$$

Solución 2. Obtenemos igual que en la solución anterior la ecuación $2^{x-1} = 5x + 2$, y encontramos la solución $x = 6$, con lo que nos queda sólo demostrar que es única.
La función $y = 2^{x-1}$ es convexa en x, luego tiene a lo sumo dos intersecciones con cualquier recta, en particular con la recta $y = 5x + 2$. Como $2^{x-1} > 5x + 2$ tanto para $x \to -\infty$ como para $x \to +\infty$, siendo $2^{x-1} < 5x + 2$ para $x = 0$, hay en efecto exactamente dos soluciones de $2^{x-1} = 5x + 2$, una negativa (que por lo tanto es irrelevante al problema) y otra positiva, que es $x = 6$, y por lo tanto es la única para la que x es un entero positivo.

$\square$