

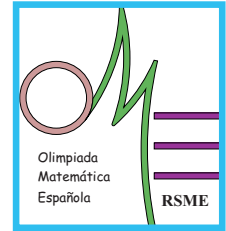


# LV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 18 de enero de 2019



1. Sea  $p \geq 3$  un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor  $p^2 - 1$  y cateto menor  $2p$ . Inscibimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa y al cateto menor del triángulo. Encuentra los valores de  $p$  para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.
2. ¿Existen  $m, n$  números naturales de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

es un número primo?

3. Fijamos un número natural  $k \geq 1$ . Encuentra todos los polinomios  $P(x)$  que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor de  $x \in \mathbb{R}$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

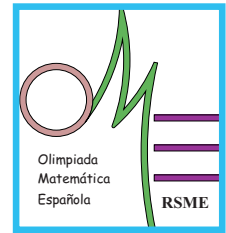


# LV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 19 de enero de 2019



4. Considera el conjunto de números enteros positivos  $n$  cumpliendo que  $1 \leq n \leq 1000000$ . En ese conjunto, indica si es mayor la cantidad de números que pueden expresarse de la forma  $a^3 + mb^2$ , con  $a, b \in \mathbb{N}$  y  $m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$  o la cantidad de números que no pueden expresarse de esa manera.

5. Prueba que para todo  $a, b, c > 0$  se cumple que

$$\frac{a^2}{b^3c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}$$

¿En qué caso se cumple la igualdad?

6. Consideramos un triángulo  $ABC$  y un punto  $D$  en el lado  $AC$ . Si  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = 1$ ,  $\angle DBC = 30^\circ$  y  $\angle ABD = 90^\circ$ , calcula el valor de  $\overline{AD}$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**